Кусочная интерполяция и её применение для простых чисел.

Мерзляков Игорь Андреевич.
Imerzliakov@gmail.com

1. Введение. В [2], [3] Sebastian Martin Ruiz получил формулу для простых чисел P_n, которая выражается в элементарных математических операциях +,-,*,/ и функции int(f(x)).

$$p_n = 2 + \sum_{z-2}^{\mathrm{int}(2n\log n+2)} \left(1 - \mathrm{int}\left(\frac{\pi(z)}{n}\right)\right); n > 1 \qquad (1)$$

где $\pi(z)$, есть номер простого числа. Который вычисляется по форумуле 2:

$$\pi(z) = \sum_{j-2}^{\mathrm{int}(z)} \left(1 + \mathrm{int}\left(-\frac{\sum_{i=1}^{j}\left(\mathrm{int}\left(\frac{j}{i}\right) - \mathrm{int}\left(\frac{j-1}{i}\right)\right) - 2}{j}\right)\right). \qquad (2)$$

2. Кусочно-линейная интерполяция. Формула общего выражения кусочно-линейной интерполяции имеет вид:

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)}{4^m} \cdot \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{|g_{2j-1}(x)|}{g_{2j-1}(x)}\right) \cdot \left(1 - \frac{|g_{2j}(x)|}{g_{2j}(x)}\right);$$

Где $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ – выполняемые функции.
$g_1(x), g_3(x), ..., g_{2m-1}(x)$ – функции сравнения для начала j-го участка, если $g(x) = 0$, то равенство, содержащееся в $g_{2j-1}(x)$ выполняется и следовательно функция $f_i(x)$ тоже выполняется, если же $g(x) <> 0$, то равенство и функция $f_i(x)$ не выполняются. $g_{2j-1}(x)$ может принимать следующие значения:
$x - y$. Здесь x сравнивается с y. эта функция будет рассмотрена на примере ниже;
$\ln\frac{x}{y}$ – здесь также функция x сравнивается с функцией y.
$g_2(x), g_4(x), ..., g_{2m}(x)$ – функции сравнения для конца j-го участка.
m – количество отрезков с одинаковой функцией;
n – количество функций, задаваемых в системе координат.
Теперь рассмотрим кусочно-линейную интерполяцию на примере где $g_i(x)$=x-a. Общай вид уравнения примет следующий вид:

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)}{4^m} \cdot \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{|x - a_{ij}|}{x - a_{ij}}\right) \cdot \left(1 - \frac{|x - b_{ij}|}{x - b_{ij}}\right);$$

где:
$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ – функции, соответствующие интервалам $[a_{11},b_{11}]$, $[a_{12},b_{12}]$,…, $[a_{nm},b_{nm}]$;
a_{11} и b_{11}, a_{12} и b_{12},…, a_{nm} и b_{nm} – координаты начала и конца, соответствующие номеру участка.

3 Понятие бесконечно малой величины δ. Введём понятие бесконечно малой величины δ, которая не даст знаменателю обратиться в ноль, для того чтобы функция была определена и в точке, где возникает неопределённость. Выделим свойство

бесконечно малой величины: бесконечно малая величина δ может принимать любые положительные значения, приближённые к нулю ($\delta \approx 0$).
С учётом бесконечно малой величины общее приближённое выражение абсолютной интерполяции имеет вид:

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(x)}{4^m}\cdot\prod_{j=1}^{m}(1+\frac{|\delta+x-a_{ij}|}{\delta+x-a_{ij}})\cdot(1-\frac{|\delta+x-b_{ij}|}{\delta+x-b_{ij}});$$

Упростим выражение $(1+\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a})\cdot(1-\frac{|x-b+\delta|}{x-b-\delta})$:

$$(1+\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a})\cdot(1-\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta})=1-\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a}\cdot\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta}+\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a}-$$
$$-\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta};$$

Докажем $(1+\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a})\cdot(1-\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta})=2-2\cdot\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a}\cdot\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta}$

и $(1+\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a})\cdot(1-\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta})=2\cdot\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a}-2\cdot\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta};$

Для этого нужно показать, что $1-\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a}\cdot\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta}=\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a}-\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta};$

Доказательство: пусть $x>a$ и $x>b$ тогда

$$\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a}-\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta}=\frac{(x-a+\delta)(x-b+\delta)-(x-a+\delta)(x-b+\delta)}{(\delta+x-a)(x-b+\delta)}=$$
$$=1-\frac{(x-a+\delta)(x-b+\delta)}{(\delta+x-a)(x-b+\delta)}=1-\frac{|x-a+\delta|}{\delta+x-a}\cdot\frac{|x-b+\delta|}{x-b+\delta}$$

Аналогичным образом доказываются случаи для $x>a$ $x<b$ и $x<a$ $x<b$.
Общий вид уравнений сравнения в компактной форме 2.2, 2.3:

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(x)}{2^m}\cdot\prod_{j=1}^{m}(\frac{|\delta+x-a_{ij}|}{\delta+x-a_{ij}}-\frac{|\delta+x-b_{ij}|}{\delta+x-b_{ij}}); \tag{3}$$

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(x)}{2^m}\cdot\prod_{j=1}^{m}(1-\frac{|\delta+x-a_{ij}|}{\delta+x-a_{ij}}\frac{|\delta+x-b_{ij}|}{\delta+x-b_{ij}}); \tag{4}$$

Теперь в качестве примера проинтерполируем функции Хависайда и Дирака:
функция Хависайда выглядит следующим образом:

$$h(x)=1\cdot\frac{(1+\frac{|x|}{x})}{2}-1\cdot\frac{(1-\frac{|x|}{x})}{2}=\frac{|x|}{x};$$

функция Дирака, как следствие кусочно-линейной интерполяции выглядит следующим образом:

$$d(x)=\frac{C}{x}\cdot\frac{(1+\frac{|x|}{x})\cdot(1-\frac{|x|}{x})}{4};$$

Здесь: C – любое рациональное число.
Известно, что производная функции Хависайда даёт нам функцию Дирака, в этом не сложно убедиться.

4 Условие «если».

Возможность исследования задач дискретной математики реализуется благодаря следующим условиям:
а) наличие вычислительно-логических составляющих;
б) наличие оператора «если»;
в) наличие переменных операторов, между которыми и производят манипуляции с целью преобразования информации, содержащейся в них.
Получим условие «если», используя метод кусочно-линейной интерполяции. Общий вид выражения «если»:

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(x)}{4}\cdot(1+\frac{|x-a|}{\delta+x-a})\cdot(1-\frac{|x-a|}{x-a-\delta}); \qquad (5)$$

где: x – переменная величина;
a – величина, с которой сравнивается x;
δ - бесконечно малая величина. Эта величина принимает бесконечно малое значение, если требуется не целый, но максимально приближённый результат. Если же требуется получить целый результат беличина δ=0 при x<>a, и δ равна бесконечно малой величине при x=a.

$f_i(x)$ - функция, которая выполняется при равенстве x=a.

Так как в последующих преобразованиях величина a не превышает величины x, то от третьего множителя в уравнении (5) можно избавиться, получим уравнение (6):

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(x)}{4}\cdot(1+\frac{|x-a|}{\delta+x-a}); \qquad (6)$$

5 Простые числа и простые близнецы.

Итак, вышеизложенные выводы позволяют описать уравнением сумму простых чисел в зависимости от номера простого числа. Из выражения суммы простых чисел можно определить зависимость простых чисел как разность между двумя соседними суммами:

$$P(X)=\sum P(X)-\sum P(X-1)$$

Используя условие «если» получаем зависимость суммы простых чисел при N>=3:

$$\sum P=3+\sum_{x=3}^{N}x\left(1-\frac{\sum_{j=2}^{x-1}\left(1-\frac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|}\right)}{\left|\sum_{j=2}^{x-1}\left(1-\frac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|}\right)\right|+\delta}\right)$$

(4)

$$\mathrm{int}(x)=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{4}\left(1+\frac{k-x}{|k-x+\delta|}\right)\left(1-\frac{k-x-1}{|k-x-1+\delta|}\right)\right)$$

(5)

В уравнении (4) N – это число большее по сравнению с искомыми простыми числами. $N=\mathrm{int}(2n\log n+2)$, где n – номер простого числа.

Теперь более подробно рассмотрим получение зависимости $\sum P$.

А) создадим счётчик j и переберём все отношения x/j. Если x/j – целое, то $\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})$ =0.

Б) выражение $1-\frac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|}$ =1, если x/j – целое

В) В выражении $\sum_{j=2}^{x-1}(1-\frac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|})$ содержится количество кратных чисел для x.

Г) Если выражение $1-\frac{\sum_{j=2}^{x-1}(1-\frac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|})}{\left|\sum_{j=2}^{x-1}(1-\frac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|})\right|+\delta}$ =0, тогда x имеет делители, если $1-\frac{\sum_{j=2}^{x-1}(1-\frac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|})}{\left|\sum_{j=2}^{x-1}(1-\frac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|})\right|+\delta}$ =1 то x – простое.

Рассуждая аналогично получению зависимости для суммы простых чисел можно получить формулу для суммы простых близнецов, она будет выглядеть так:

$$\sum P_t=\sum_{x=2}^{N}(2x)\left(1-\frac{P(x+2)-P(x)-2}{|P(x+2)-P(x)-2+\delta|}\right) \qquad (7)$$

где N – номер натурального числа.

подставим в (6) выражение для p(x):

$$\sum P_t = \sum_{x=2}^{N}(2x)\left(1-\frac{(x+2)\left(1-\dfrac{\sum\limits_{j=2}^{x+1}\left(1-\dfrac{\frac{x+2}{j}-\mathrm{int}(\frac{x+2}{j})}{\left|\frac{x+2}{j}-\mathrm{int}(\frac{x+2}{j})+\delta\right|}\right)}{\left|\sum\limits_{j=2}^{x+1}\left(1-\dfrac{\frac{x+2}{j}-\mathrm{int}(\frac{x+2}{j})}{\left|\frac{x+2}{j}-\mathrm{int}(\frac{x+2}{j})+\delta\right|}\right)\right|+\delta}\right)-x\left(1-\dfrac{\sum\limits_{j=2}^{x-1}\left(1-\dfrac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|}\right)}{\left|\sum\limits_{j=2}^{x-1}\left(1-\dfrac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|}\right)\right|+\delta}\right)-2}{\left|(x+2)\left(1-\dfrac{\sum\limits_{j=2}^{x+1}\left(1-\dfrac{\frac{x+2}{j}-\mathrm{int}(\frac{x+2}{j})}{\left|\frac{x+2}{j}-\mathrm{int}(\frac{x+2}{j})+\delta\right|}\right)}{\left|\sum\limits_{j=2}^{x+1}\left(1-\dfrac{\frac{x+2}{j}-\mathrm{int}(\frac{x+2}{j})}{\left|\frac{x+2}{j}-\mathrm{int}(\frac{x+2}{j})+\delta\right|}\right)\right|+\delta}\right)-x\left(1-\dfrac{\sum\limits_{j=2}^{x-1}\left(1-\dfrac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|}\right)}{\left|\sum\limits_{j=2}^{x-1}\left(1-\dfrac{\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})}{\left|\frac{x}{j}-\mathrm{int}(\frac{x}{j})+\delta\right|}\right)\right|+\delta}\right)-2+\delta\right|}\right)$$

В этом уравнении происходит суммирование близнецов, причём в серии близнецов типа 3 5 7, происходит суммирование 3+5+5+7, т.е. близнецы, стоящие в середине складываются дважды. Числа 1 и 2 в данном расчёте не участвуют

Можно получить ещё одну формулу для суммы простых близнецов, используя элементарные математические операции +,-,*,/ и оператор int(F(x)):

$$\sum P_t = \sum_{x=2}^{n}(2p(x)+2)\,\mathrm{int}\left(\frac{p(x+1)-p(x)}{2}\right)\mathrm{int}\left(\frac{2}{p(x+1)-p(x)}\right)$$

где n – номер простого числа

6. Литература

1. S. M. Ruiz, A functional recurrence to obtain the prime numbers using the Smarandache Prime Function, Smarandache Notions Journal 11 (2000) 56.
2. S. M. Ruiz, The general term of the prime number sequence and the Smarandache Prime Function, *Smarandache Notions Journal* **11** (2000) 59.
3. S. M. Ruiz, *Applications of Smarandache Functions and Prime and Coprime Functions*, American Research Press, Rehoboth, 2002.